

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2016 года
по математике

Профильный уровень

Подготовлен Федеральным государственным бюджетным
научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

**Пояснения к демонстрационному варианту
контрольных измерительных материалов для единого государственного
экзамена 2016 года по МАТЕМАТИКЕ**

При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2016 г. следует иметь в виду, что задания, включённые в него, не отражают всех вопросов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2016 г. Полный перечень вопросов, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2016 г., приведён в кодификаторе элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2016 г. по математике.

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности. Приведённые критерии оценки выполнения заданий с развёрнутым ответом, включённые в этот вариант, дают представление о требованиях к полноте и правильности записи развёрнутого ответа.

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ.

- 4 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

Ответ: _____.

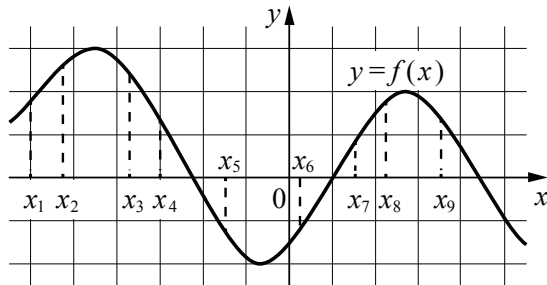
- 5 Найдите корень уравнения $3^{x-5} = 81$.

Ответ: _____.

- 6 Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Угол BAC равен 32° . Найдите угол BOC . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, \dots, x_9 .



Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Ответ: _____.

- 8 В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ выразите в см.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

- 9 Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Ответ: _____.

- 10 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде; f_0 — частота испускаемого сигнала (в МГц); f — частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Ответ: _____.

- 11 Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

14 Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

15 Решите неравенство $\frac{\log_9(2-x) - \log_{15}(2-x)}{\log_{15}x - \log_{25}x} \leq \log_{25}9$.

16 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

17 31 декабря 2013 г. Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какова должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

18 Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x-5|)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

- а) Сколько чисел написано на доске?
б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Система оценивания

Ответы к заданиям 1–12

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

№ задания	Ответ
1	8
2	4
3	6
4	0,08
5	9
6	64
7	4
8	4
9	-0,8
10	751
11	5
12	-5

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Решение. а) Преобразуем обе части уравнения:

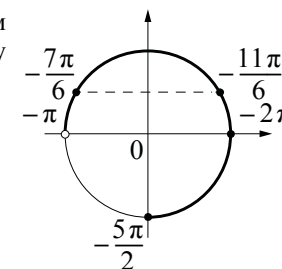
$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x; 2\sin^2 x - \sin x = 0; \sin x(2\sin x - 1) = 0,$$

откуда $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ находим: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.



Получаем числа: $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 14** Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.
- Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 - Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

Решение. а) Пусть точка H — середина AC . Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем,

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M .

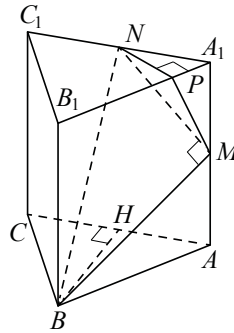
б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1 . Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1 .

Прямая BM перпендикулярна MN , тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $\sin \angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$.

Следовательно, $\angle NMP = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б	2
Выполнен только один из пунктов а и б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 15** Решите неравенство $\frac{\log_9(2-x) - \log_{15}(2-x)}{\log_{15}x - \log_{25}x} \leq \log_{25}9$.

Решение. Левая часть неравенства определена при $2-x > 0$; $x > 0$; $x \neq 1$.

При $0 < x < 1$ получаем $\log_{15}x < \log_{25}x$, $\log_9(2-x) > \log_{15}(2-x)$, поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9$.

При $1 < x < 2$ получаем $\log_{15}x > \log_{25}x$, $\log_9(2-x) < \log_{15}(2-x)$, поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9$.

Таким образом, решение исходного неравенства $(0; 1)$ и $(1; 2)$.

Ответ: $(0; 1); (1; 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

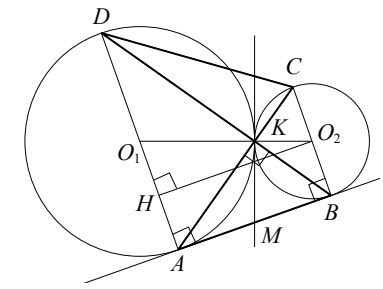
- 16** Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K , пересекает AB в точке M . По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB , у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD . Значит, $AD \perp AB$. Аналогично, получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая — радиус 1.



Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H , равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1 :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0,8$ и $S_{AKB} = 4S = 3,2$.

Ответ: 3,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b , ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17

31 декабря 2013 г. Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какова должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Пусть сумма кредита равна a , ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют $k\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0,01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1 + m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга составит:

$$a_3 = am^3 - (1 + m + m^2)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x = 0$, откуда $x = \frac{am^3(m - 1)}{m^3 - 1}$.

При $a = 9\,930\,000$ и $k = 10$, получаем: $m = 1,1$ и

$$x = \frac{9\,930\,000 \cdot 1,331 \cdot 0,1}{0,331} = 3\,993\,000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для ежегодного платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
С помощью верных рассуждений получено уравнение, из которого может быть найдено значение ежегодного платежа, но коэффициенты уравнения неверные из-за ошибки в вычислениях	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

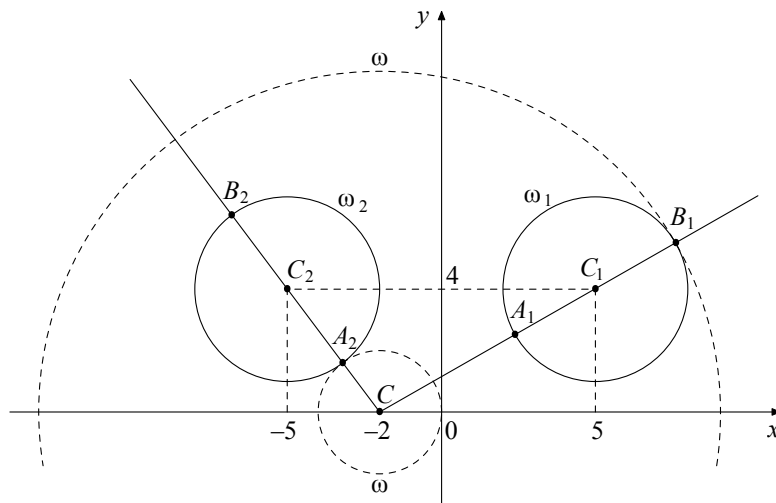
18 Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x-5|)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x-5|)^2 + (y-4)^2 = 9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5; 4)$ радиусом 3, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5; 4)$ таким же радиусом (см. рисунок).

При положительных значениях a уравнение $(x+2)^2 + y^2 = a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2; 0)$ радиусом a . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a , при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2 .



Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1 , где A_1 лежит между C и C_1 . Так как

$$CC_1 = \sqrt{(5+2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}, \text{ то } CA_1 = \sqrt{65} - 3, \text{ } CB_1 = \sqrt{65} + 3.$$

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2 , где A_2 лежит между C и C_2 . Так как $CC_2 = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2} = 5$, то $CA_2 = 5 - 3 = 2$, $CB_2 = 5 + 3 = 8$.

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 2$ и $a = \sqrt{65} + 3$.

Ответ: 2; $\sqrt{65} + 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

19 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение. Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел —

делится на 4. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k - 8l = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $5l \geq 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l = -3(k + l + m)$: $4k - 8l = -132$, откуда $k = 2l - 33$. Так как $k + l \leq 44$, получаем: $3l - 33 \leq 44$; $3l \leq 77$; $l \leq 25$; $k = 2l - 33 \leq 17$, то есть положительных чисел не более 17.

Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и 2 раза написан 0. Тогда $\frac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25}{44} = -3$; указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта <i>a</i> ; — обоснованное решение пункта <i>b</i> ; — искомая оценка в пункте <i>в</i> ; — в пункте <i>в</i> приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минобрнауки России от 26.12.2013 № 1400 зарегистрирован Минюстом России 03.02.2014 № 31205)

«61. По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развёрнутым ответом...

62. В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

1. Работа участника ЕГЭ направляется на третью проверку, если расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13 – 19, составляет 2 и более балла.

В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, которое было оценено двумя экспертами со столь существенным расхождением.

2. Работа участника ЕГЭ направляется на третью проверку при наличии расхождений хотя бы в двух из заданий 13 – 19.

В этом случае третий эксперт перепроверяет ответы на все задания работы.